Rubik

July 2023

1 Identifikation S_4 mit G

Lemma 1. *Wir können die Drehungen des Würfels mit der symmetrischen Gruppe auf vier Objekten S_4 identifizieren, nämlich auf den vier Raumdiagonalen.*

Proof. Die Wirkung auf den Raumdiagonalen gibt einen Gruppenhomommorhpismus Drehungen $\to S_4$. Die Raumdiagonalen fixieren den Würfel, insofern ist die Abbildung injektiv. Wir zählen dass es 24 Drehungen gibt (z.B. 4 Drehungen die eine der 6 Seiten fixieren), also auch bijektiv. $\square$

Die 24 Elemente zerfallen in Konjugationsklassen:

()	Identität	1
(1234)	Drehungen um eine Flächenmittelsenkrechte	2×3
(12)(24)	Drehung um eine Fläche 180 Grad	3
(123)	Drehung um eine Raumdiagonale 120 Grad	2×4
(12)	Drehung um eine Kantenmittenverbindung / Kantenflip	6

2 Permutationsdarstellungen

Anzahl	Objekte	Stabilisator	#	Signum
24	Raumlagen des Würfels, Koordinaten-Dreibeine	e	1	triv
12	Kanten	$\langle (12) \rangle$	2	sgn
8	Ecken	$\langle (123) \rangle$	3	triv
6	Flächen	$\langle (1234) \rangle$	4	sgn
6	Koordinaten-Dreibein (ohne Richtung)	$\langle (12)(34), (13)(24) \rangle$	4	sgn
6	?	$\langle (12), (34) \rangle$	?	
4	Raumdiagonalen	$\langle (12), (123) \rangle = S_3$	6	sgn
3	Koordinate-Achsen (ohne Richtung)	$\langle (1234), (12)(34) \rangle = D_4$	8	triv
2	Signum (nochwas?)	A_4	12	sgn
1	triv	S_4	24	triv

Das signum bestimmen wir indem wir die Wirkung von (12) testen. Drei verschiedene mit 6 Elementen. Zwei haben nur eine konjugationsklasse und

gehörten zu einem Gruppenhmomorphismus. Die mit 4 Elementen ist injektiv und surjektiv und zweigt die Iso zu S_4.
[1]

Wir sehen welche Elememten nicht fixpunktfrei auf welchen Permutationsdarstellungen operieren direkt daran welche im Stabilisator enthalten sind. Etwas mehr Information, nämlich die Anzahl der Fixpunkte [2] und sogar die Zykelzerlegenung jeder Konjugationsklasse auf jeder Permutatationsdarstellung

Objekte	(1)	(1234)	(12)(34)	(123)	(12)
Kanten	1^{12}	$\mathbf{4^3}$	$\mathbf{2^6}$	$\mathbf{3^4}$	$1^2 2^5$
Ecken	1^8	$\mathbf{4^2}$	$\mathbf{2^4}$	$1^2 3^2$	$\mathbf{2^4}$
Flächen	1^6	$1^2 4^1$	$1^2 2^2$	$\mathbf{3^2}$	$\mathbf{2^3}$

3 Welche EKF-Muster sind möglich

Wir sagen ein EKF-Muster ist wenn alle Ecken und Kanten von einer Seite je die gleiche Farbe haben.

Lemma 2. *Physikalisch realisierbar ist solch ein Muster wenn wir die Menge der Ecken, der Kanten und der Flächen getrennt drehen und zusammenbauen.*

Wir können o.B.d.A. annehmen dass die Flächen fixiert sind.

Definition 3. *Der EKF-Würfel (σ, τ) für $\sigma, \tau \in S_4$ besteht aus alle Ecken gedreht nach σ, alle Kanten gedreht nach τ, alle Flächen fixiert.*

Nenne die Drehung der Ecken σ und der Kanten τ.

Lemma 4. *Eine Drehung aus S_4 wirkt auf Kanten und Flächen mit dem Signum von S_4, und auf den Ecken mit dem trivialen Signum.*

Andererseits sind die Ecken-Orientierungszahlen für eine Drehung aller Ecken natürlich wieder 0 modulo 3 und die Kanten-Orientierungszahlen für eine Drehung aller Kanten natürlich wieder 0 modulo 2 (denn es sind diesselben Umorientierungen wie wenn der gesamte Würfel gedreht wird). Mit der Klassifikation der Lösbarkeit beim Rubikwürfel folgt:

Lemma 5. *Der EKF Würfel (σ, τ) ist lösbar genau dann wenn $sgn(\tau) = +1$.*

Wir klären Fixpunktfreiheit auf der Permutationsdarstellung der Flächen: Lediglich (123) und (12) operieren fixpunktfrei (s.o.). Wir finden also zB. folgende Klassen von Mustern

- Diagonalkreuze (also Ecken fix, Kanten fixpunktfrei und signum +1)

$$(\sigma, \tau) = ([()], [(\mathbf{123})])$$

[1]Signum der regulären Darstellung: Ein Element der Ordnung d wird geschickt auf n/d d-Zykel (vgl Langrange), also auf -1 wenn d gerade n/d ungerade. Insbesondere hat eine einfache Gruppe keine 2-maximalen element, entsprechend zyklischen 2-Sylowgruppen

[2]Dies mit allen Darstellungen ist praktisch die Charaktertafel der Gruppe

- Kreuze (also Ecken fixpunktfrei, Kanten fixpunktfrei)

$$(\sigma,\tau) = ([(\mathbf{123})], ()) \quad ([(\mathbf{12})], ())$$

- Punkte (also Ecken gleich Kanten fixpunktfrei, Kantensignum +1)

$$(\sigma,\tau) = ([(\mathbf{123}))], [(\mathbf{123})])$$

- Echte EKF Muster (Ecken fixpunktfrei, Kanten fixpunktfrei und signum +1, Quotient fixpunktfrei)

$$(\sigma,\tau) = ([(123)], [(123)]) \quad ([(12)], [(123))])$$

  wobei wir in jeder Lösung nach geeigneten Vertretern der Konjugationsklasse suchen müssen deren Quotient fixpunktfrei ist, und die Lösungen module simultaner Konjugation klassifizieren müssen. Wir schreiben die Menge aller Produkte $\sigma \cdot \tau^{-1}$ als Vereinigung von Konjugationsklassen hin[3][4]

$$[(123)] \times [(123)] = \underbrace{[((\mathbf{123}), (\mathbf{132}))]}_{[(132)]} \cup \underbrace{[((123), (123))]}_{[()]} \cup \underbrace{[((123), (324))]}_{(12)(34)} \cup \underbrace{[((\mathbf{123}), (\mathbf{234}))]}_{(124)(3)}$$

$$[(12)] \times [(123)] = \underbrace{[((\mathbf{12}), (\mathbf{132}))]}_{[(23)]} \cup \underbrace{[((\mathbf{12}), (\mathbf{214}))]}_{[(24)]} \cup \underbrace{[((12), (314))]}_{(1342))} \cup \underbrace{[((12), (134))]}_{(1432)}$$

  (die verbleibenden sind "Walzen" wo an zwei gegenüberliegenden Flächen Punkte sind und sonst EKF Muster, sowie die bereits oben gefundene Lösung mit überall Punkten)

[3] Wir gucken, was der Zentralisator des ersten Element dann noch mit dem zweiten machen kann, besser darstellen

[4] Das ist das Tensorprodukt