9 - Irrationale Zahlen, Rechnen mit Wurzeln I

Aufgaben

1. Kreuze wahre Aussagen an.

   a) ☐ $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$

   b) ☐ $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \in \mathbb{Q}$

   c) ☐ $2 \in \mathbb{R}$

   d) ☐ $\sqrt{0,000000000000000001} \in \mathbb{Q}$

   e) ☐ $\pi \cdot \frac{\pi}{\pi^2} \in \mathbb{Q}$

   f) ☐ $\sqrt{2^{111}} \in \mathbb{Q}$

   g) ☐ $\sqrt{3^{110} \cdot 5^{120}} \notin \mathbb{Q}$

   h) ☐ $\pi \in \mathbb{Q}$

   i) ☐ $\sqrt{10000000000000} \notin \mathbb{Q}$

   j) ☐ $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

2. Vereinfache soweit wie möglich. Unter der Wurzel sollen so wenig Faktoren wie möglich verbleiben.

   a) $\sqrt{x^2}$ b) $\sqrt{y^4}$ c) $\sqrt{a^2 \cdot b^4}$ d) $\sqrt{4x^2}$

   e) $\sqrt{100x^2}$ f) $\sqrt{40a^2}$ g) $\sqrt{x^2 + ax^2}$ h) $\sqrt{xy^3 \cdot xy^2}$

   i) $\sqrt{a} \cdot \sqrt{9a}$ j) $\sqrt{12x} \cdot \sqrt{3x}$ k) $\frac{\sqrt{20x}}{\sqrt{5x}}$ l) $\frac{\sqrt{2ab}}{\sqrt{72a}}$

   m) $\sqrt{\frac{1}{3}(80x^2 - 5x^2)}$ n) $\frac{\sqrt{(1+x)^2}}{\sqrt{1-x^2}}$ o) $\sqrt{x}(\sqrt{x} + \sqrt{2x})$ p) $\left(\sqrt{x}\right)^2 \cdot \sqrt{x^2}$

Erklärung

Im Unterricht haben wir die irrationalen Zahlen $\sqrt{2}$ und π kennengelernt. Man kann auch die Irrationalität anderer Wurzeln nach folgender Regel entscheiden: Wurzeln von rationalen Zahlen (also von ganzen Zahlen, Brüchen) sind ebenfalls rational, wenn in der Primfaktorzerlegung (von Nenner und Zähler) *jeder Faktor* (in Zähler und Nenner) *paarweise* vorkommt. Also beispielsweise ...

$\sqrt{36} = \sqrt{(2 \cdot 2) \cdot (3 \cdot 3)}$ ist rational, nämlich 6

$\sqrt{72} = \sqrt{2 \cdot (2 \cdot 2) \cdot (3 \cdot 3)}$ ist irrational, da die 2 einmal alleine steht

$\sqrt{0,001} = \sqrt{\frac{1}{1000}} = \sqrt{\frac{1}{10 \cdot (10 \cdot 10)}}$ ist irrational, da im Nenner die 10 einmal alleine steht, aber

$\sqrt{0,01} = \sqrt{\frac{1}{100}} = \sqrt{\frac{1}{(10 \cdot 10)}}$ ist rational, da im Nenner die 10 nur paarweise steht

$\sqrt{\frac{63}{28}} = \sqrt{\frac{7 \cdot (3 \cdot 3)}{7 \cdot (2 \cdot 2)}}$ ist rational, nämlich $1,5$. Die einsame 7 lässt sich nämlich kürzen!

Bei Potenzen kannst Du am (geraden oder ungeraden) Exponenten erkennen, ob die Faktoren paarweise vorkommen.

Lösungen

1. Kreuze wahre Aussagen an.

   a) falsch, denn $\sqrt{2}$ ist irrational

   b) wahr, denn $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$ ist rational

   c) wahr, denn $2 = 2,0000...$ ist eine reelle Zahl

   d) wahr, denn $\sqrt{0,000000000000000001} = 0,000000001$ ist rational

   e) wahr, denn $\pi \cdot \frac{\pi}{\pi^2} = 1$ ist rational

   f) falsch, denn unter der Wurzel stehen 55 Pärchen aus 2ern und eine einzelne 2

   g) falsch, denn die Wurzel aus 55 3er- und 60 5er-Pärchen ist rational

   h) falsch, denn π ist irrational

   i) wahr, denn unter der Wurzel steht 10^{13}, also 6 10er-Pärchen und eine einzelne 10

   j) wahr, denn rationale Zahlen sind reelle Zahlen, also Kommazahlen

2. Vereinfache soweit wie möglich. Unter der Wurzel sollen so wenig Faktoren wie möglich verbleiben.

   a) x

   b) y^2

   c) $\sqrt{a^2} \cdot \sqrt{b^4} = ab^2$

   d) $2x$

   e) $10x$

   f) $\sqrt{4 \cdot 10a^2} = 2a\sqrt{10}$

   g) $\sqrt{x^2(1+a)} = x\sqrt{1+a}$

   h) $\sqrt{x^2y^5} = xy^2\sqrt{y}$

   i) $\sqrt{a \cdot 9a} = 3a$

   j) $\sqrt{12x \cdot 3x} = 6x$

   k) $\sqrt{\frac{20x}{5x}} = 2$

   l) $\sqrt{\frac{2ab}{72a}} = \frac{1}{6}\sqrt{b}$

   m) $\sqrt{\frac{1}{3}(75x^2)} = 5x$

   n) $\sqrt{\frac{(1+x)^2}{(1-x)(1+x)}} = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

   o) $x + \sqrt{x}\sqrt{2x} = x + x\sqrt{2}$

   p) $x \cdot x = x^2$