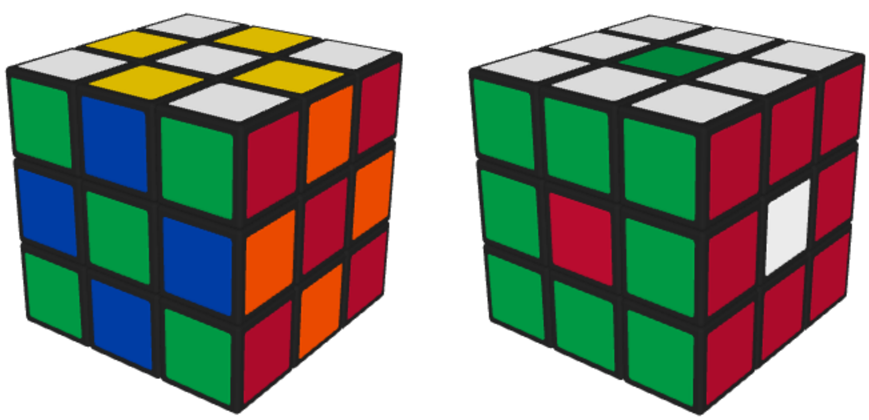
Rubik Würfel

July 2023

1 Übersicht

In folgender Ausführung diskutieren wir mit elementaren und mit gruppentheoretischen Methoden die Frage, welche 2- und 3-farbigen Muster auf dem Rubik-Würfel machbar sind (dh. durch eine Folge von Zügen aus dem gelösten Rubik-Würfel erzeugt werden können). Zwei dieser Muster dürfte jede Spieler*in schon einmal produziert haben:



Diese Frage und wesentliche Ideen sind von Gruppen von Schüler*innen im Rahmen des Schulprojekts Rubik Cube[1] und der programmierbaren Plattform[2] sowie dem parallelen Seminar im Bereich Lehramt der Universität Hamburg. entstanden. Wir danken auch dem Simon-Claussen-Fond für Ihre Förderung im Rahmen von Innovativ, Interdistiplinär, Interaktiv.

Die folgenden Ausführungen diskutieren die elementare Herangehensweise, die prinzipielle Lösung mithilfe der Kenntnis aller lösbaren Stellungen, und die

[1]https://mint.lentner.net/index.php?title=Rubik
[2]https://ide.cube.codes/

systematische Abzählung mit elementare Methoden der Gruppentheorie (insbesondere Identifikation der Symmetriegruppe des Würfels mit der Gruppe $\mathbb{S}_4$). Es enthält auch mehrere "Forschungsfragen" (elementar wie mathematisch) die sich in diesem Zusammenhang ergeben. Es ist insofern für interessierte Lehrer*innen intendiert, die in dieser Frage Teilprojekte mit oder ohne Bezug zu Permutationen anbieten wollen, sowie natürlich auch direkt für besonders interessierte Schüler*innen.

2 Grundsätzliche Strategie

2.1 Problemstellung

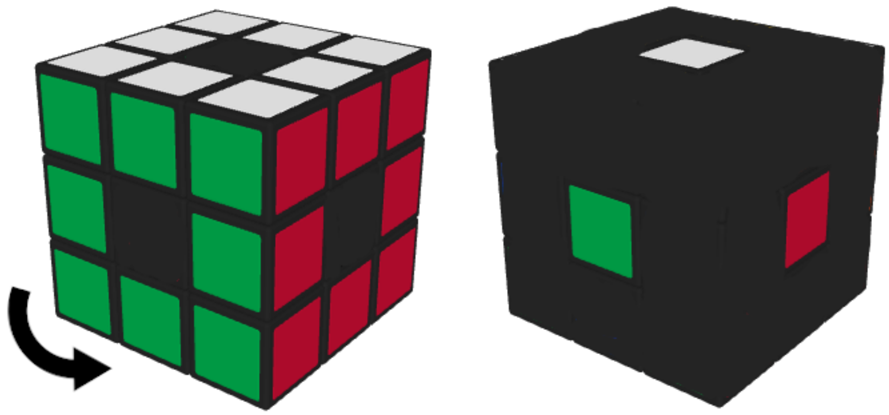
Unter einem **Muster** auf dem Würfel verstehen wir eine Aufteilung der Seitenfläche in 2, 3 oder mehr Teilbereichen, die jeweils mit einer Farbe gefüllt werden sollen, und dasselbe Muster soll sich auf allen sechs Seiten wiederholen.

2.2 Baubare Muster und Dreh-Muster

Die erste Frage ist, welche solchen Muster überhaupt **baubar** sind (dh. durch Zerlegen und entsprechenden Zusammenbaus des Würfels realisierbar sind). Eine Strategie um baubare Muster zu generieren ist die folgende:

Ein **Dreh-Muster** entsteht, indem die 26 Würfelchen des Rubik-Würfels in Teilmengen aufgeteilt werden, diese jeweils im Raum auf eine beliebige Weise gedreht werden, und schließlich wieder zu einem vollständigen Würfel zusammengesetzt werden. Wir gehen im folgenden davon aus, dass diese Teilmengen unter allen Drehungen invariant sind, sodass sich am Ende sicher wieder ein vollständiger Würfel ergibt. Beispiele:

- Wählen wir als Teilmengen einerseits alle Kanten aus und andererseits alle Ecken und Mitten aus, dann entstehen nach Drehung und Zusammensetzen schachbrettartige Muster, wie im ersten Bild oben.
- Wählren wir als Teilmengen einerseits alle Kanten und Ecken aus und andererseits alle Mitten, dann entstehen nach Drehung und Zusammensetzen Punkt-Muster, wie im zweiten Bild oben.



Je nach Drehung können natürlich a-priori Seitenflächen entstehen, in denen die Teilbereicht die gleiche Farbe erhalten, solche Möglichkeiten müssen je nach Wunsch und Fall später aussortiert werden.

Es ergibt sich natürlich die Frage, ob diese Dreh-Muster schon alle möglichen baubaren Muster umfassen:

Fakt 2.1. *Ein baubares Muster, bei dem jeder Teilbereich der Seitenfläche alle Ecken oder alle Kanten oder die Mitte enthält, ist zwingend ein Dreh-Muster.*

Forschungsfrage 2.2. *Wie verhält sich dies bei anderen Mustern, zum Beispiel einem "T" auf allen Seiten?*

2.3 Machbare Dreh-Muster

Es ergibt sich die Frage, ob ein Dreh-Muster immer **machbar** sind, also aus dem gelösten Rubik-Würfel durch eine Folge von Zügen produziert werden kann. Grundlage ist die folgende fundamentale Klassifikationsaussage, die beispielsweise in [**?**] bewiesen wird und hier nicht weiter erklärt werden soll: Für eine baubare Färbung des Rubik-Würfels betrachten wir die Permutation der Ecken, Kanten und Mitten und gewisse Zahlen $\{0,1\}$ bzw $\{0,1,2\}$, welche die insgesamte Orientierungen der Kanten bzw. Ecken messen.

Theorem 2.3. *Eine baubare Färbung ist machbar (oder: lösbar) wenn das Signum (s.u.) der Permutationen von Ecken, Kanten, Mitten zusammen* $+1$ *ist und die Orientierungszahlen von Kanten und Ecken jeweils* 0 *sind.*

Für Dreh-Muster haben wir folgende interessante Beobachtung: Weil die Orientierungszahlen von Ecken bzw. Kanten jeweils nur von der Position und Lage der Ecken bzw. Kanten abhängen (nicht aber von den restlichen Würfelchen) und die Drehung des Würfels als ganzes natürlich machbar ist, folgt sofort:

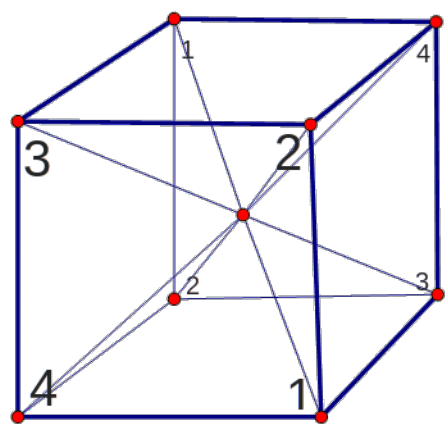
Fakt 2.4. *Ein baubares Muster, bei dem jeder Teilbereich der Seitenfläche alle Ecken oder alle Kanten oder die Mitte enthält, hat Orientierungszahlen* 0 *dh. die Machbarkeit bzw. Lösbarbeit hängt nur am Signum der Permutationen der Ecken, Kanten und Mitten.*

3 Die Symmetriegruppe des Würfels

3.1 Identifikation $\mathbb{S}_4$ mit der Symmetriegruppe des Würfels

Die symmetrische Gruppe $\mathbb{S}_n$ besteht aus allen $n!$ vielen Permutationen von n Objekten, die wir $1, 2, \ldots, n$ nummerieren. Wir notieren Permutationen in Zykelschreibweise, z.B. (1234) vertauscht $1 \mapsto 2, 2 \mapsto 3, 3 \mapsto 4, 4 \mapsto 1$.Für Einführung in Gruppen, Homomorhpismen, Konjugationsklassen etc., siehe etwa [**?**]

Lemma 3.1. *Wir können die Drehungen des Würfels mit der symmetrischen Gruppe* $\mathbb{S}_4$ *identifizieren, die aus allen Permutationen von 4 Objekten besteht. Genauer wird eine Drehung identifiziert mit ihrer Wirkung auf den vier Raumdiagonalen.*



Proof. Die Wirkung auf den Raumdiagonalen gibt einen Gruppenhomommorphismus Drehungen $\to \mathbb{S}_4$. Die Raumdiagonalen fixieren den Würfel, insofern ist die Abbildung injektiv. Wir zählen dass es 24 Drehungen gibt (z.B. 4 Drehungen die eine der 6 Seiten fixieren), also auch bijektiv. $\square$

Die Permutationen bis auf Numerierung entsprechen den durch Konjugationsklassen bzw. Typen von Zykel-Zerlegungen. Die 24 Elemente der $\mathbb{S}_4$ zerfallen in die folgenden Konjugationsklassen, die den folgenden Typen von Drehungen entsprechen:

Zykel-Typ	Beispiel	Geometrische Beschreibung	Anzahl
$1+1+1+1$	()	Identität	1
4	(1234)	Drehungen um eine Fläche	2×3
$2+2$	(12)(24)	Drehung um eine Fläche 180 Grad	3
$1+3$	(123)	Drehung um eine Raumdiagonale 120 Grad	2×4
$1+1+2$	(12)	Drehung einer Kante um 180 Grad	6
			$= 24$

3.2 Signum auf Ecken, Kanten, Mitten

Für jede Drehung vorstellen, müssen wir das Signum der entsprechenden Permutation der Ecken, Kanten und Mitten kennen um den Klassifikationssatz 2.3 anwenden zu können.

Fakt 3.2. *Eine Drehung des Würfels, die unter obiger Identifikation dem Element $\sigma \in \mathbb{S}_4$ entspricht, bewirkt eine Permutation auf den Ecken, Kanten und Mitten mit Signum*

$$\operatorname{sgn}_{Ecken}(\sigma) = +1, \qquad \operatorname{sgn}_{Kanten}(\sigma) = \operatorname{sgn}_{Mitten}(\sigma) = \operatorname{sgn}(\sigma)$$

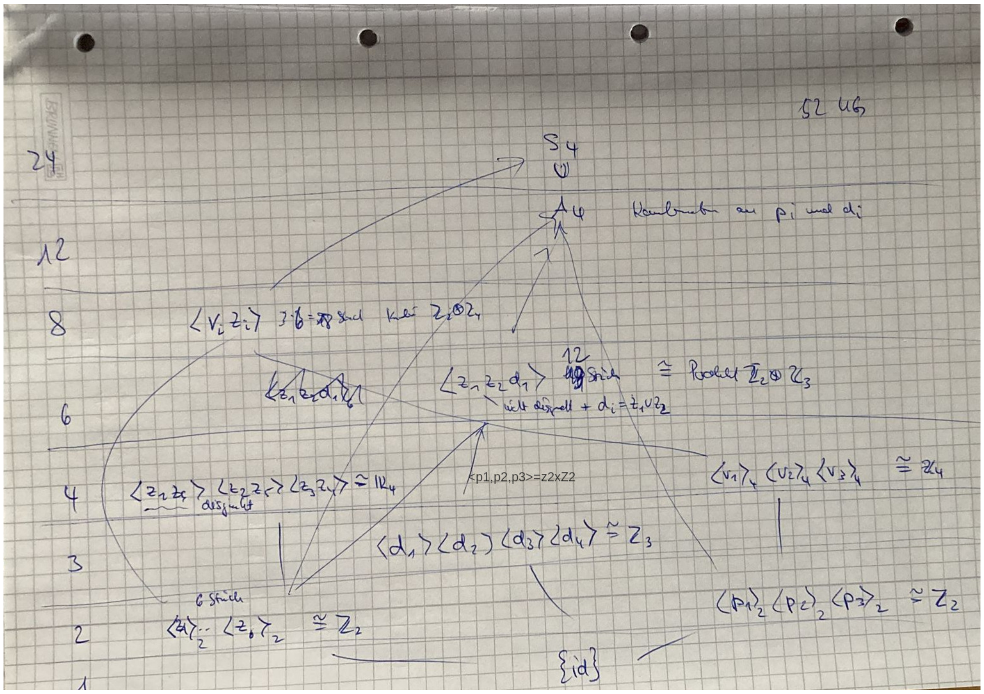
wobei sgn *das gewöhnliche Signum der* $\mathbb{S}_4$ *ist mit* $\operatorname{sgn}(123) = \operatorname{sgn}(12)(34) = +1$ *und* $\operatorname{sgn}(12) = \operatorname{sgn}(1234) = -1$.

Proof. In Hinblick auf die Klassifikation der Untergruppen der $\mathbb{S}_4$ mit einer einzigen Untergruppe mit 12 Elementen kann ein Gruppenhomomorphismus $\mathbb{S}_4 \to \{+1, -1\}$ nur entweder $+1$ oder sgn sein. Insofern genügt es die Aussage z.B. für $\sigma = (1234)$ zu prüfen, also die Drehung um 90 Grad um eine Seitenfläche, welche auf den Ecken eine Permutation vom Typ $4+4$ (gerade), auf den Kanten eine Permutation vom Typ $4+4+4$ (ungerade) und auf den Mitten eine Permutation von Typ $1+4+1$ (ungerade) bewirkt.

Es ist aber auch möglich, auf diese Weise alle Konjugationsklassen durchzugehen, siehe Tabelle unten. □

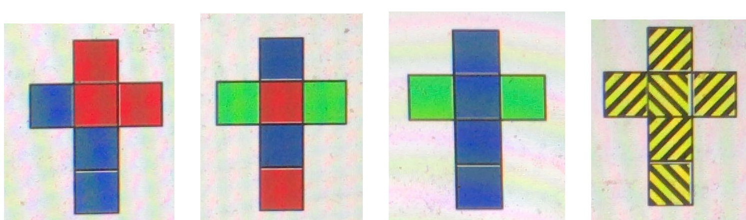
3.3 Appendix: Untergruppen der $\mathbb{S}_4$

Eine interessante Übung ist es, alle Untergruppen der $\mathbb{S}_4$ zu bestimmen....



Forschungsfrage 3.3. *Bestimmen Sie Färbungen von Ecken, Kanten oder Flächen, so dass diejenigen Drehungen die die Färbung erhalten jeweils eine der möglichen Untergruppen sind*

Beispielsweise haben folgende Färbungen der Flächen die Untergruppen von Symmetrien $\mathbb{Z}_3$ (Drehungen um eine Ecke), $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ (alle drei Drehungen um 180 Grad, Kleinsche Vierergruppe), $\mathbb{D}_4$ (Drehungen um eine Fläche plus 180 Grad Drehung zur gegenüberliegenden Fläche), $\mathbb{A}_4$ (beliebige "gerade" Drehung, dies kann nicht einfach durch Färbung der Flächen realisiert werden)



Mathematische Forschungsfrage 3.4. *Die Untergruppe der Elemente der $\mathbb{S}_n$, welche eine Färbung / Partition $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_n$ der Menge $\{1, 2, \ldots, n\}$ erhalten, sind $\mathbb{S}_{n_1} \times \mathbb{S}_{n_2} \times \cdots \times \mathbb{S}_{n_k}$. Welche Untergruppen $S \subset \mathbb{S}_n$ gehören zu Färbungen der Permutationsdarstellungen $\mathbb{S}_n/U$ wobei U wiederum alle Untergruppen durchläuft? Anders gesagt: Welche Untergruppen treten als Untergruppen von Symmetrien in welchen transitiven Permutationsdarstellungen auf?*

3.4 Appendix: Permutationsdarstellungen

Ein einfacher aber zentraler Satz der Gruppentheorie [**?**] besagt, dass für eine endliche Gruppe G die transitiven Permutationsdarstellungen X - dh. alle möglichen Arten, wie die Gruppe G auf einer Menge X als Permutationen wirken kann, sodass in X jedes Element von jedem Element aus durch die Wirkung erreicht werden kann - in eineindeutiger Beziehung zu den Untergruppen $U \subset G$ bis auf Konjugation stehen. Genauer betrachte man für jede Permutationsdarstellung X und einen beliebig gewählten Punkt x der Menge die Untergruppe der Gruppenenelemente die x festlassen; umgekehrt existiert für jede Untergruppe $U \subset G$ die Menge der Nebenklassen $X = G/U$ auf denen G durch Rechtsmultiplikation wirkt und die Klasse des neutralen Elements $x = eU$ wird genau von U festgelassen.

Wir listen nun die Untergruppen der $\mathbb{S}_4$ auf und die zugehörigen Permutationsdarstellungen die uns schon begegnet sind, sowie aus gegebenem Anlaß die Anzahl der Fixpunkte jeder Konjugationsklasse und das entsprechende Signum.

Anzahl	Objekte	Stabilisator	#	Signum
24	Raumlagen des Würfels, Koordinaten-Dreibeine	e	1	triv
12	Kanten	$\langle(12)\rangle$	2	sgn
8	Ecken	$\langle(123)\rangle$	3	triv
6	Flächen	$\langle(1234)\rangle$	4	sgn
6	Koordinaten-Dreibein (ohne Richtung)	$\langle(12)(34),(13)(24)\rangle$	4	sgn
6	?	$\langle(12),(34)\rangle$	?	
4	Raumdiagonalen	$\langle(12),(123)\rangle = S_3$	6	sgn
3	Koordinate-Achsen (ohne Richtung)	$\langle(1234),(12)(34)\rangle = D_4$	8	triv
2	Signum (nochwas?)	A_4	12	sgn
1	triv	S_4	24	triv

Wir sehen welche Elememten nicht fixpunktfrei auf welchen Permutationsdarstellungen operieren direkt daran welche im Stabilisator enthalten sind. Etwas mehr Information, nämlich die Anzahl der Fixpunkte [3] und sogar die Zykelzerlegenung jeder Konjugationsklasse auf jeder Permutatationsdarstellung

Objekte	(1)	(1234)	(12)(34)	(123)	(12)
Kanten	1^{12}	$\mathbf{4^3}$	$\mathbf{2^6}$	$\mathbf{3^4}$	$1^2 2^5$
Ecken	1^8	$\mathbf{4^2}$	$\mathbf{2^4}$	$1^2 3^2$	$\mathbf{2^4}$
Flächen	1^6	$1^2 4^1$	$1^2 2^2$	$\mathbf{3^2}$	$\mathbf{2^3}$

Mathematische Forschungsfrage 3.5. *Es ist erstaunlich, dass wir für jede Untergruppe ein Signum auf der entsprechenden Permutationsdarstellung G/U erhalten dh. einen Gruppenhomomorhpismus $G \to \mathbb{Z}_2$. Allgemeiner kann zu jeder linearen Darstellung offenbar die Determinanten-Darstellungen betrachtet werden. Was hat dies Gruppentheoretische für Anwendungen, und wie können wir systematisch sehen, welche Untergruppen der $\mathbb{S}_n$ in diesem Sinne als Signum* $+1$ *oder* sgn *liefern?*

[3] Dies mit allen Darstellungen ist praktisch die Charaktertafel der Gruppe

4 Welche EKF-Muster sind möglich

Wir betrachten nun **EKF-Muster**, so nennen wir im folgenden Muster in denen alle Ecken und alle Kanten je Seite je die gleiche Farbe haben - zusammen mit der Farbe der Mitte handelt es sich also um maximal 3-farbige Muster und es sind die einzigen drehsymmetrischen Muster.

Nach Fakt 2.1 sind die baubaren Muster dieses Typs immer Drehmuster. Wir können o.B.d.A. annehmen dass die Flächen fixiert sind

Definition 4.1. *Der EKF-Würfel* (σ, τ) *für* $\sigma, \tau \in \mathbb{S}_4$ *besteht aus alle Ecken gedreht nach* σ*, alle Kanten gedreht nach* τ*, alle Flächen fixiert.*

Nach Fakt 2.4 entscheiden die Signums der Permutationen von σ auf den 8 Ecken und τ auf den 12 Kanten darüber ob das Muster machbar ist, und nach Fakt 3.2 ist das erste Signum trivial und das zweite gleich dem üblichen Signum auf $\mathbb{S}_4$, also:

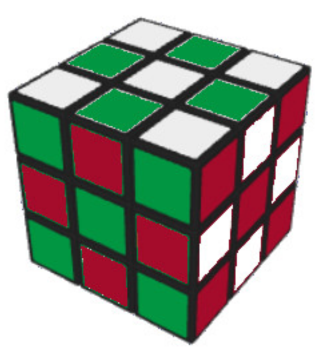
Fakt 4.2. *Der EKF Würfel* (σ, τ) *ist lösbar genau dann wenn* $\mathrm{sgn}(\tau) = +1$.

Um zu erreichen dass überall wirklich unterschiedliche Farben auftreten, müssen wir bestimmen, welche Drehungen alle Flächen auf jeweils eine andere Fläche dreht (vgl. allgemeiner im Appendix für beliebige Permutationsdarstellungen). Offenbar ergeben die Klassen (123) und (12) fixpunktfreie Drehungen, während $(1234), (12)(34)$ zwei Fixpunkte hat (nämlich die Fläche um die gedreht wird und die gegenüberliegende). Von diesen Klassen hat nur (123) positives Signum, kommt also für τ infrage. Wir finden also genau folgende Klassen von Mustern (zur besseren Visualisierung arbeiten wir in der obigen Numerierung der Raumdiagonalen mit dem Repräsentanten (12), Drehung der mittleren Kante im Bild, und (143), Drehung um die mittlere Ecke im Bild im Uhrzeigersinn)

Notation der Konjgation-sklasse von Paaren

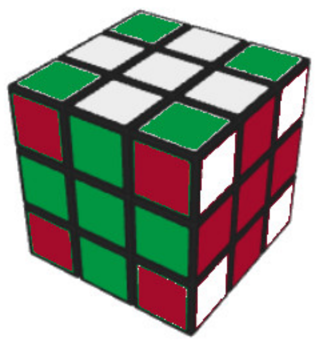
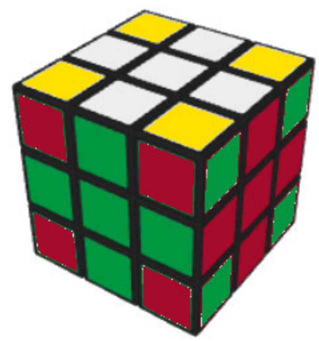
- Ein Diagonalkreuz (also Ecken fix, Kanten fixpunktfrei und Signum +1)

$$(\sigma, \tau) = ([()], [(\mathbf{143})])$$



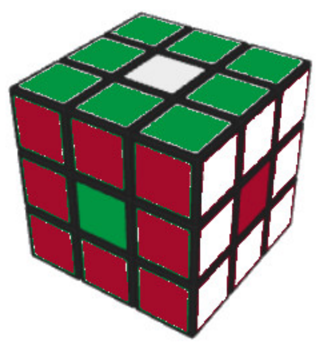
- Zwei Kreuze (also Ecken fixpunktfrei, Kanten fixpunktfrei)

$$(\sigma, \tau) = ([(\mathbf{143})], ()) \quad ([(\mathbf{12})], ())$$

- Punkte (also Ecken gleich Kanten, beide fixpunktfrei, Signum +1)

$$(\sigma, \tau) = ([(\mathbf{143}))], [(\mathbf{134})])$$



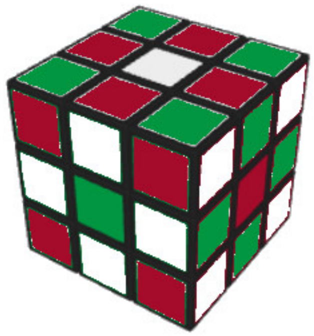
- Echte EKF Muster (Ecken fixpunktfrei, Kanten fixpunktfrei und signum +1, Quotient fixpunktfrei)

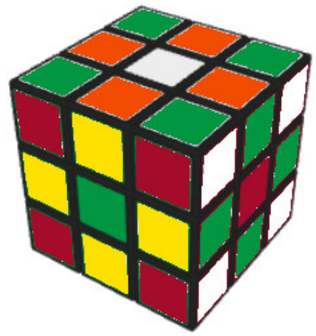
$$(\sigma, \tau) = ([(143)], [(143)]) \quad ([(12)], [(143))])$$

wobei wir in jeder Lösung nach geeigneten Vertretern der Konjugationsklasse suchen müssen deren Quotient fixpunktfrei ist, und die Lösungen module simultaner Konjugation klassifizieren müssen. Wir schreiben die Menge aller Produkte $\sigma \cdot \tau^{-1}$ als Vereinigung von Konjugationsklassen hin

$$[(143)] \times [(143)] = \underbrace{[((\mathbf{143}), (\mathbf{143}))]}_{[(143)]} \cup \underbrace{[((143), (143))]}_{[()]} \cup \underbrace{[((143), (342))]}_{(14)(23)} \cup \underbrace{[((\mathbf{143}), (\mathbf{243}))]}_{(142)(3)}$$

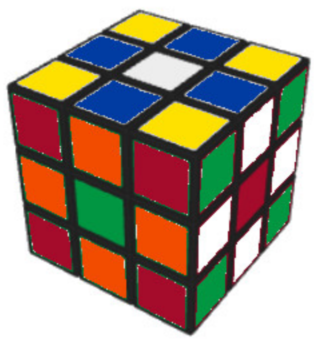
Wir gucken, was der Zentralisator des ersten Element dann noch mit dem zweiten machen kann, besser darstellen





second case

$$[(12)] \times [(143)] = \underbrace{[((12),(143))]}_{[(1342)]} \cup \underbrace{[((\mathbf{12}),(\mathbf{124}))]}_{[(14)]}$$



Die verbleibenden Muster sind "Walzen" wo an zwei gegenüberliegenden Flächen Punkte sind und sonst EKF Muster, sowie die bereits oben gefundene Lösung mit überall Punkten.