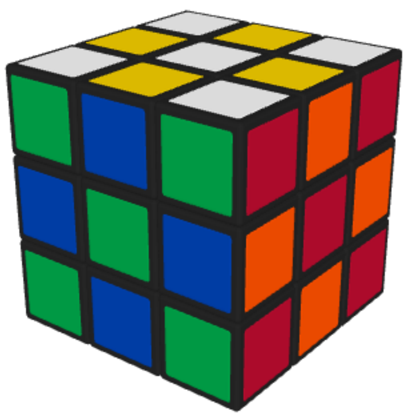
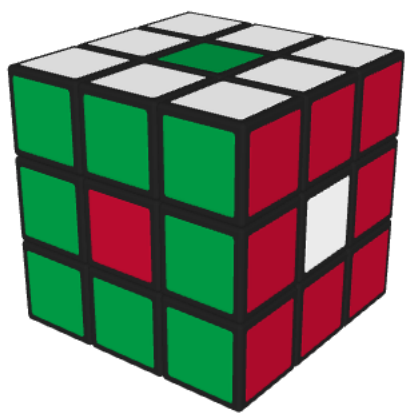
Mehrfarbige Muster am Rubik Würfel

July 2023

1 Übersicht

In der folgenden Ausführung diskutieren wir mit elementaren und mit gruppentheoretischen Methoden die Frage, welche 2- und 3-farbigen Muster auf dem Rubik-Würfel machbar sind (dh. durch eine Folge von Zügen aus dem gelösten Rubik-Würfel erzeugt werden können). Zwei dieser Muster dürfte jede Spieler*in schon einmal produziert haben:





Diese Frage und wesentliche Ideen sind von Gruppen von Schüler*innen im Rahmen des Schulprojekts Rubik Cube[1] und der programmierbaren Plattform[2] sowie dem parallelen Seminar im Bereich Lehramt der Universität Hamburg. entstanden. Wir danken auch dem Simon-Claussen-Fond für die Förderung im Rahmen von Innovativ, Interdistiplinär, Interaktiv.

Die folgenden Ausführungen diskutieren die elementare Herangehensweise, die prinzipielle Lösung mithilfe der Kenntnis aller lösbaren Stellungen, und die

[1]https://mint.lentner.net/index.php?title=Rubik
[2]https://ide.cube.codes/

systematische Abzählung mit elementare Methoden der Gruppentheorie (insbesondere Identifikation der Symmetriegruppe des Würfels mit der Gruppe $\mathbb{S}_4$). Es enthält auch mehrere "Forschungsfragen" (elementar wie mathematisch) die sich in diesem Zusammenhang ergeben. Es ist insofern für interessierte Lehrer*innen intendiert, die in dieser Frage Teilprojekte mit oder ohne Bezug zu Permutationen anbieten wollen, für universitäre Seminare, Projekte und Forbildungen im Bereich Lehramt, sowie natürlich auch direkt für besonders interessierte Schüler*innen.

2 Grundsätzliche Strategie

2.1 Problemstellung

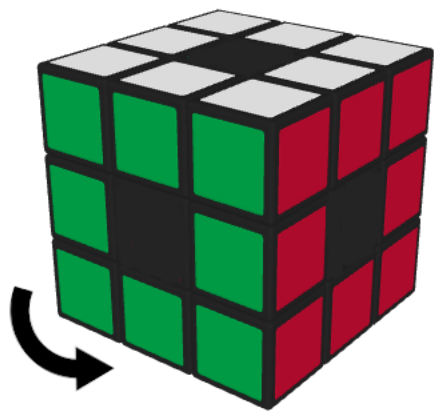
Unter einem **Muster** auf dem Würfel verstehen wir eine Aufteilung der Seitenfläche in 2, 3 oder mehr Teilbereichen, die jeweils mit einer Farbe gefüllt werden sollen, und dasselbe Muster soll sich auf allen sechs Seiten wiederholen.

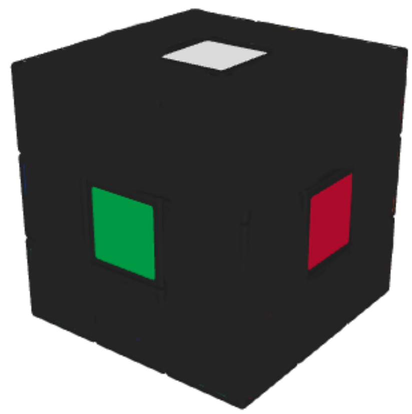
2.2 Baubare Muster und Dreh-Muster

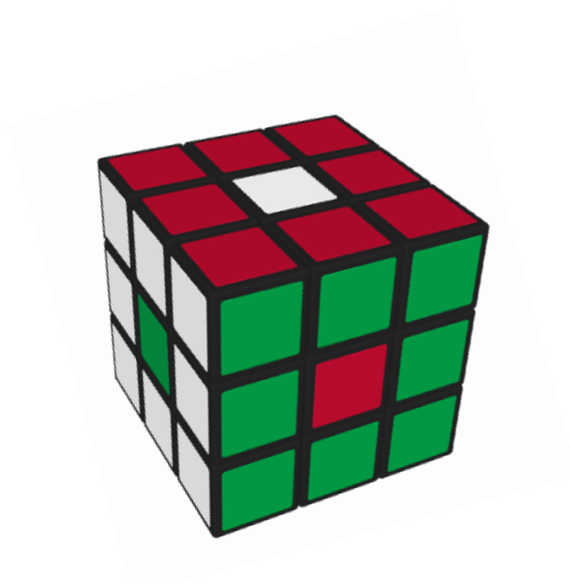
Die erste Frage ist, welche solchen Muster überhaupt **baubar** sind (dh. durch Zerlegen und entsprechenden Zusammenbaus des Würfels realisierbar sind). Eine Strategie um baubare Muster zu generieren ist die folgende:

Ein **Dreh-Muster** entsteht, indem die 26 Würfelchen des Rubik-Würfels in Teilmengen aufgeteilt werden, diese jeweils im Raum auf eine beliebige Weise gedreht werden, und schließlich wieder zu einem vollständigen Würfel zusammengesetzt werden. Wir gehen im folgenden davon aus, dass diese Teilmengen unter allen Drehungen invariant sind, sodass sich am Ende sicher wieder ein vollständiger Würfel ergibt. Beispiele:

- Wählen wir als Teilmengen einerseits alle Kanten aus und andererseits alle Ecken und Mitten aus, dann entstehen nach Drehung und Zusammensetzen schachbrettartige Muster, wie im ersten Bild oben.
- Wählren wir als Teilmengen einerseits alle Kanten und Ecken aus und andererseits alle Mitten, dann entstehen nach Drehung und Zusammensetzen Punkt-Muster, wie im zweiten Bild oben.







Je nach Drehung können natürlich a-priori Seitenflächen entstehen, in denen die Teilbereicht die gleiche Farbe erhalten, solche Möglichkeiten müssen je nach Wunsch und Fall später aussortiert werden.

Es ergibt sich natürlich die Frage, ob diese Dreh-Muster schon alle möglichen baubaren Muster umfassen:

Fakt 2.1. *Ein baubares Muster, bei dem jeder Teilbereich der Seitenfläche alle Ecken oder alle Kanten oder die Mitte enthält, ist zwingend ein Dreh-Muster.*

Forschungsfrage 2.2. *Wie verhält sich dies bei anderen Mustern, zum Beispiel einem "T" auf allen Seiten?*

2.3 Machbare Dreh-Muster

Es ergibt sich die Frage, ob ein Dreh-Muster immer **machbar** sind, also aus dem gelösten Rubik-Würfel durch eine Folge von Zügen produziert werden kann. Grundlage ist die folgende fundamentale Klassifikationsaussage, die beispielsweise in [**?**] bewiesen wird und hier nicht weiter erklärt werden soll: Für eine baubare Färbung des Rubik-Würfels betrachten wir die Permutation der Ecken, Kanten und Mitten und gewisse Zahlen $\{0,1\}$ bzw $\{0,1,2\}$, welche die insgesamte Orientierungen der Kanten bzw. Ecken messen.

Theorem 2.3. *Eine baubare Färbung ist machbar (oder: lösbar) wenn das Signum (s.u.) der Permutationen von Ecken, Kanten, Mitten zusammen* $+1$ *ist und die Orientierungszahlen von Kanten und Ecken jeweils* 0 *sind.*

Für Dreh-Muster haben wir folgende interessante Beobachtung: Weil die Orientierungszahlen von Ecken bzw. Kanten jeweils nur von der Position und Lage der Ecken bzw. Kanten abhängen (nicht aber von den restlichen Würfelchen) und die Drehung des Würfels als ganzes natürlich machbar ist, folgt sofort:

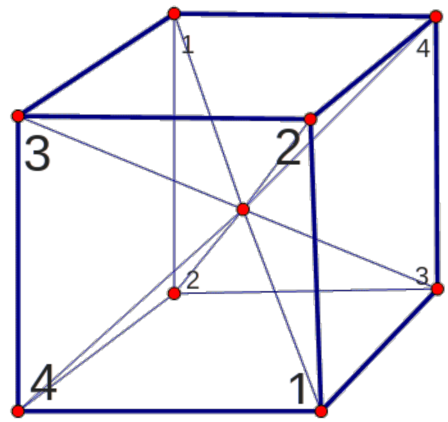
Fakt 2.4. *Ein baubares Muster, bei dem jeder Teilbereich der Seitenfläche alle Ecken oder alle Kanten oder die Mitte enthält, hat Orientierungszahlen* 0 *dh. die Machbarkeit bzw. Lösbarbeit hängt nur am Signum der Permutationen der Ecken, Kanten und Mitten.*

3 Die Symmetriegruppe des Würfels

3.1 Identifikation $\mathbb{S}_4$ mit der Symmetriegruppe des Würfels

Die symmetrische Gruppe $\mathbb{S}_n$ besteht aus allen $n!$ vielen Permutationen von n Objekten, die wir $1,2,\ldots,n$ nummerieren. Wir notieren Permutationen in Zykelschreibweise, z.B. (1234) vertauscht $1 \mapsto 2, 2 \mapsto 3, 3 \mapsto 4, 4 \mapsto 1$.Für Einführung in Gruppen, Homomorhpismen, Konjugationsklassen etc., siehe etwa [**?**]

Lemma 3.1. *Wir können die Drehungen des Würfels mit der symmetrischen Gruppe* $\mathbb{S}_4$ *identifizieren, die aus allen Permutationen von 4 Objekten besteht. Genauer wird eine Drehung identifiziert mit ihrer Wirkung auf den vier Raumdiagonalen.*



Proof. Die Wirkung auf den Raumdiagonalen gibt einen Gruppenhomommorphismus Drehungen $\to \mathbb{S}_4$. Die Raumdiagonalen fixieren den Würfel, insofern ist die Abbildung injektiv. Wir zählen dass es 24 Drehungen gibt (z.B. 4 Drehungen die eine der 6 Seiten fixieren), also auch bijektiv. $\square$

Konjugation von einem Element σ der Gruppe (hier $\mathbb{S}_n$) mit einem anderen Element α bedeutet formal die Um- oder Zuordnung

$$\sigma \mapsto \alpha\sigma\alpha^{-1}$$

Eine wesentliche allgemeine Eigenschaft ist dass diese Um- oder Zuordnung immer die Multiplikation erhält

$$(\alpha\sigma\alpha^{-1})(\alpha\mu\alpha^{-1}) = \alpha(\sigma\mu)\alpha^{-1}$$

Die Menge aller Gruppenelemente bis auf Konjugation heißen *Konjugationsklassen*. Bis auf Konjugation bedeutet etwas ähnliches wie "bis auf Symmetrie". Für Permutationen ist die Konjugation einfach explizit dass man die *Einträge der Permutation σ mit der Permutation α permutiert*:

$$\alpha(ijk\cdots)\alpha^{-1} = (\alpha(i)\alpha(j)\alpha(k)\cdots)$$

Die Konjugationsklassen bis auf Permutation entsprechen also den Permutationen bis auf Numerierung, und insofern entsprechen den Typen von Zykel-Zerlegungen. Die 24 Elemente der $\mathbb{S}_4$ zerfallen in die folgenden Konjugationsklassen, die den folgenden Typen von Drehungen entsprechen:

Zykel-Typ	Beispiel	Geometrische Beschreibung	Anzahl
$1+1+1+1$	()	Identität	1
4	(1234)	Drehungen an Fläche ± 90 Grad	2×3
$2+2$	(12)(24)	Drehung an Fläche 180 Grad	3
$1+3$	(123)	Drehung an Ecke ± 120 Grad	2×4
$1+1+2$	(12)	Drehung an Kante um 180 Grad	6
			$= 24$

(wobei Drehung an einer Fläche gleichbedeutend mit Drehung um eine Koordinatenachse ist, und Drehung an Ecke gleichbedeutend mit Drehung um eine Raumdiagonale ist, und Drehung an Kante gleichbedeutend mit Drehung um eine Achse die die Mitten zweier gegenüberliegender Kanten verbindet)

3.2 Signum auf Ecken, Kanten, Mitten

Für jede Drehung vorstellen, müssen wir das Signum der entsprechenden Permutation der Ecken, Kanten und Mitten kennen um den Klassifikationssatz 2.3 anwenden zu können.

Fakt 3.2. *Eine Drehung des Würfels, die unter obiger Identifikation dem Element $\sigma \in \mathbb{S}_4$ entspricht, bewirkt eine Permutation auf den Ecken, Kanten und Mitten mit Signum*

$$\mathrm{sgn}_{Ecken}(\sigma) = +1, \qquad \mathrm{sgn}_{Kanten}(\sigma) = \mathrm{sgn}_{Mitten}(\sigma) = \mathrm{sgn}(\sigma)$$

wobei sgn *das gewöhnliche Signum der* $\mathbb{S}_4$ *ist mit* $\mathrm{sgn}(123) = \mathrm{sgn}(12)(34) = +1$ *und* $\mathrm{sgn}(12) = \mathrm{sgn}(1234) = -1$.

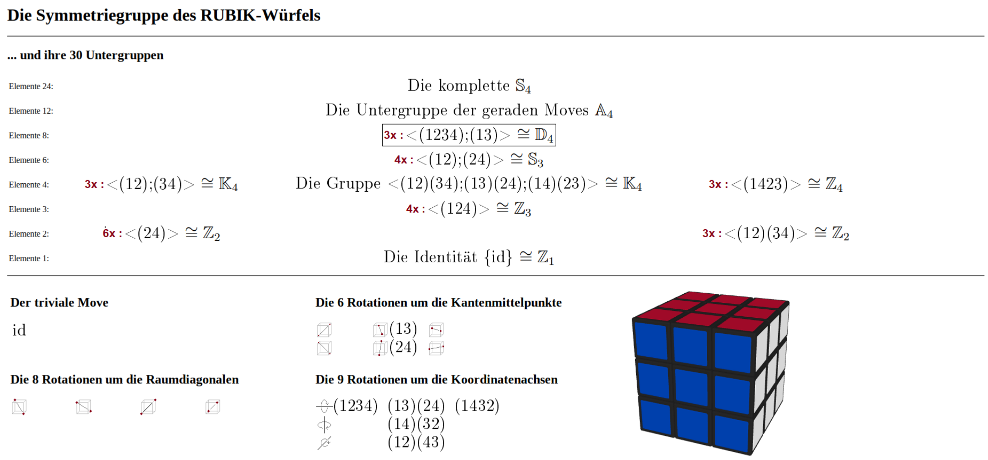
Proof. In Hinblick auf die Klassifikation der Untergruppen der $\mathbb{S}_4$ mit einer einzigen Untergruppe mit 12 Elementen kann ein Gruppenhomomorphismus $\mathbb{S}_4 \to \{+1, -1\}$ nur entweder $+1$ oder sgn sein. Insofern genügt es die Aussage z.B. für $\sigma = (1234)$ zu prüfen, also die Drehung um 90 Grad um eine Seitenfläche, welche auf den Ecken eine Permutation vom Typ $4 + 4$ (gerade), auf den Kanten eine Permutation vom Typ $4+4+4$ (ungerade) und auf den Mitten eine Permutation von Typ $1 + 4 + 1$ (ungerade) bewirkt.

Es ist aber auch möglich, auf diese Weise alle Konjugationsklassen durchzugehen, siehe Tabelle unten. □

3.3 Appendix: Untergruppen der $\mathbb{S}_4$

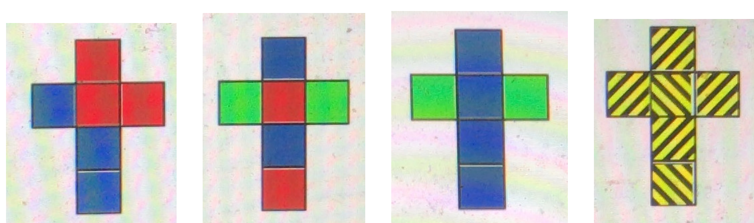
Eine interessante Übung ist es, alle Untergruppen der $\mathbb{S}_4$ zu bestimmen. Dies bedeutet dann entsprechend natürlich auch eine Untergruppe der Symmetrien des Würfels. Dies findet sich in diverser Literatur zur Gruppentheorie, in unserem Kontext stellen wir folgende interaktive Website zur Verfügung:

http://www.lepirate-rosenheim.de/rubikisogruppen/SymetriegruppeRUBIK.html



Forschungsfrage 3.3. *Bestimmen Sie Färbungen von Ecken, Kanten oder Flächen, so dass diejenigen Drehungen die die Färbung erhalten jeweils eine der möglichen Untergruppen sind*

Beispielsweise haben folgende Färbungen der Flächen die Untergruppen von Symmetrien $\mathbb{Z}_3$ (Drehungen um eine Ecke), $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ (alle drei Drehungen um 180 Grad, Kleinsche Vierergruppe), $\mathbb{D}_4$ (Drehungen um eine Fläche plus 180 Grad Drehung zur gegenüberliegenden Fläche), $\mathbb{A}_4$ (beliebige "gerade" Drehung, dies kann nicht einfach durch Färbung der Flächen realisiert werden)



Mathematische Forschungsfrage 3.4. *Die Untergruppe der Elemente der $\mathbb{S}_n$, welche eine Färbung / Partition $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_n$ der Menge $\{1, 2, \ldots, n\}$ erhalten, sind $\mathbb{S}_{n_1} \times \mathbb{S}_{n_2} \times \cdots \times \mathbb{S}_{n_k}$. Welche Untergruppen $S \subset \mathbb{S}_n$ gehören zu Färbungen der Permutationsdarstellungen $\mathbb{S}_n/U$ wobei U wiederum alle Untergruppen durchläuft? Anders gesagt: Welche Untergruppen treten als Untergruppen von Symmetrien in welchen transitiven Permutationsdarstellungen auf?*

3.4 Appendix: Permutationsdarstellungen

Ein einfacher aber zentraler Satz der Gruppentheorie [**?**] besagt, dass für eine endliche Gruppe G die transitiven Permutationsdarstellungen X - dh. alle möglichen Arten, wie die Gruppe G auf einer Menge X als Permutationen wirken kann, sodass in X jedes Element von jedem Element aus durch die Wirkung erreicht werden kann - in eineindeutiger Beziehung zu den Untergruppen $U \subset G$ bis auf Konjugation stehen. Genauer betrachte man für jede Permutationsdarstellung X und einen beliebig gewählten Punkt x der Menge die Untergruppe der Gruppenenelemente die x festlassen; umgekehrt existiert für jede Untergruppe $U \subset G$ die Menge der Nebenklassen $X = G/U$ auf denen G durch Rechtsmultiplikation wirkt und die Klasse des neutralen Elements $x = eU$ wird genau von U festgelassen.

Wir listen nun die Untergruppen der $\mathbb{S}_4$ auf und die zugehörigen Permutationsdarstellungen die uns schon begegnet sind, sowie aus gegebenem Anlaß das entsprechende Signum.

Anzahl	Objekte	Stabilisator	=	#	Signum
24	Raumlagen des Würfels bzw Koordinaten-Dreibein	id	1	1	+1
12	Kanten	$\langle(12)\rangle$	$\mathbb{Z}_2$	2	sgn
8	Ecken	$\langle(123)\rangle$	$\mathbb{Z}_3$	3	+1
6	Flächen	$\langle(1234)\rangle$	$\mathbb{Z}_4$	4	sgn
6	Koordinaten-Dreibein (ohne Richtung)	$\langle(12)(34),(13)(24)\rangle$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	4	sgn
6	?	$\langle(12),(34)\rangle$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	4	?
4	Raumdiagonalen	$\langle(12),(123)\rangle$	$\mathbb{S}_3$	6	sgn
3	Koordinate-Achsen (ohne Richtung)	$\langle(1234),(12)(34)\rangle$	$\mathbb{D}_4$	8	+1
2	Signum (weitere?)		$\mathbb{A}_4$	12	sgn
1	triv		$\mathbb{S}_4$	24	+1

Wir sehen welche Elememten nicht fixpunktfrei auf welchen Permutationsdarstellungen operieren direkt daran welche im Stabilisator enthalten sind. Etwas mehr Information, nämlich die Anzahl der Fixpunkte [3] und sogar die Zykelzerlegenung jeder Konjugationsklasse auf jeder Permutatationsdarstellung (wobei wir $1+1+1+\ldots+1$ als 1^n abkürzen und die jeweils fixpunktfreie wirkenden Elemente fett drucken):

Objekte	(1)	(1234)	(12)(34)	(123)	(12)
Kanten	1^{12}	$\mathbf{4^3}$	$\mathbf{2^6}$	$\mathbf{3^4}$	$1^2 2^5$
Ecken	1^8	$\mathbf{4^2}$	$\mathbf{2^4}$	$1^2 3^2$	$\mathbf{2^4}$
Flächen	1^6	$1^2 4^1$	$1^2 2^2$	$\mathbf{3^2}$	$\mathbf{2^3}$

Forschungsfrage 3.5. *Finde eine geometrische Interpretation für die letzte verbliebene Permutationsdarstellung auf* 6 *Objekten, wobei* id, (12), (34), (12)(34) *das erste Objekt festlassen (und die anderen* 5 *Untergruppen dieses Typs entsprechend jedes der anderen Objekte).*

Mathematische Forschungsfrage 3.6. *Es ist erstaunlich, dass wir für jede Untergruppe ein Signum auf der entsprechenden Permutationsdarstellung G/U erhalten dh. einen Gruppenhomomorhpismus $G \to \mathbb{Z}_2$. Allgemeiner kann zu jeder linearen Darstellung offenbar die Determinanten-Darstellungen betrachtet werden. Was hat dies Gruppentheoretische für Anwendungen, und wie können*

[3] Dies mit allen Darstellungen ist praktisch die Charaktertafel der Gruppe

wir systematisch sehen, welche Untergruppen der $\mathbb{S}_n$ in diesem Sinne als Signum $+1$ *oder* sgn *liefern? (z.B. bereits die reguläre Permutationsdarstellung liefert eine Einschränkung an die Struktur einer einfachen Gruppe)*

4 Welche EKF-Muster sind möglich

Wir betrachten nun **EKF-Muster**, so nennen wir im folgenden Muster in denen alle Ecken und alle Kanten je Seite je die gleiche Farbe haben - zusammen mit der Farbe der Mitte handelt es sich also um maximal 3-farbige Muster und es sind die einzigen drehsymmetrischen Muster auf den Seiten.

Nach Fakt 2.1 sind die baubaren Muster dieses Typs immer Dreh-Muster. Wir können o.B.d.A. annehmen dass die Flächen fixiert sind

Definition 4.1. *Der EKF-Würfel* (σ, τ) *für* $\sigma, \tau \in \mathbb{S}_4$ *besteht aus alle Ecken gedreht nach* σ*, alle Kanten gedreht nach* τ*, alle Flächen fixiert.*

Nach Fakt 2.4 entscheiden die Signums der Permutationen von σ auf den 8 Ecken und τ auf den 12 Kanten darüber ob das Muster machbar ist, und nach Fakt 3.2 ist das erste Signum trivial und das zweite gleich dem üblichen Signum auf $\mathbb{S}_4$, also:

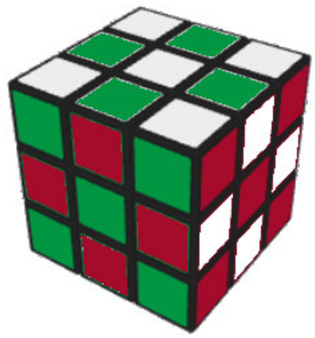
Fakt 4.2. *Der EKF Würfel* (σ, τ) *ist lösbar genau dann wenn* $\mathrm{sgn}(\tau) = +1$.

Um zu erreichen dass überall wirklich unterschiedliche Farben auftreten, müssen wir bestimmen, welche Drehungen alle Flächen auf jeweils eine andere Fläche dreht (vgl. allgemeiner im Appendix für beliebige Permutationsdarstellungen). Offenbar ergeben die Konjugationsklassen $[(123)]$ und $[(12)]$ fixpunktfreie Drehungen, während $[(1234)], [(12)(34)]$ jeweils zwei Fixpunkte haben (nämlich die Fläche um die gedreht wird und die gegenüberliegende). Von diesen Klassen hat nur $[(123)]$ positives Signum, kommt also für τ infrage.

Wir gehen nun also alle Kombinationen (σ, τ) durch, für die $\mathrm{sgn}(\tau) = +1$ und für die die verschiedenen Bedingungen an Fixpunktfreiheit gelten. Wie wollen wiederum nur alle Lösungen bis auf (simultane!) Konjugation beider Einträge, was wir als $[\sigma, \tau] = \{(\alpha\sigma\alpha^{-1}), \alpha, \tau\alpha^{-1}\}$ notieren und weiter unten noch ausführlicher diskutieren wenn es relevant wird. Zur besseren Visualisierung arbeiten wir in der obigen Numerierung der Raumdiagonalen mit dem Repräsentanten (12), Drehung der mittleren Kante im Bild, und (143), Drehung um die mittlere Ecke im Bild im Uhrzeigersinn.

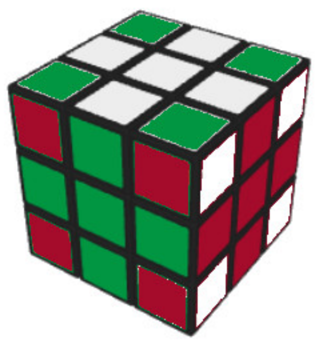
- Ein Diagonalkreuz besteht aus Ecken-Farbe gleich Mitten-Farbe und Kanten-Farbe überall davon verschieden. Also $\sigma = \mathrm{id}$ und $\tau = (143)$ oder ein konjugiertes, die zweite Wahl $\tau = (12)$ ist wegen $\mathrm{sgn}(\tau) = -1$ unzulässig.

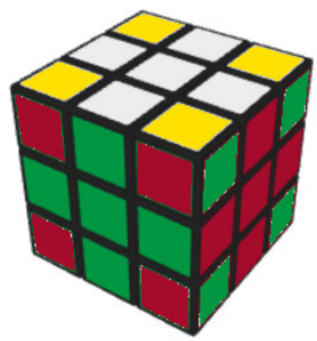
$$[\sigma, \tau] = [\mathrm{id}, (143)]$$



- Ein Kreuze besteht aus Kanten-Farben gleich Mitten-Farben und Ecken-Farben überall davon verschieden. Weil es hier keine Einschränkung durch Signum gibt, gibt es zwei Lösugen bis auf Konjugation

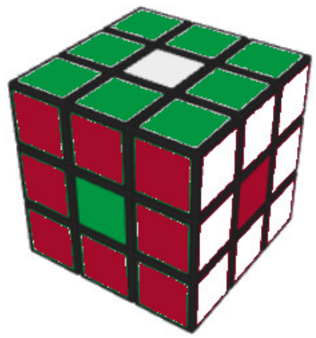
$$[\sigma, \tau] = [(143), \mathrm{id}], \quad [(12), \mathrm{id}]$$





- Ein Punkt besteht aus Ecken-Farbe gleich Kanten-Farbe und die Mitten-Farbe überall davon verschieden. Da hier wieder $\mathrm{sgn}(\tau) = +1$ gelten muss gibt es nur eine Lösung bis auf Konjugation

$$[\sigma, \tau] = [(143), (143)]$$



- Echte dreifarbige Muster bestehen aus Ecken-Farben, Kanten-Farben und Mitten-Farben, die jeweils voneinander überall verschieden sind. Wir brauchen also σ fixpunktfrei und τ fixpunktfrei und $\sigma\tau^{-1}$ fixpunktfrei, sowie wieder $\mathrm{sgn}(\tau) = +1$.

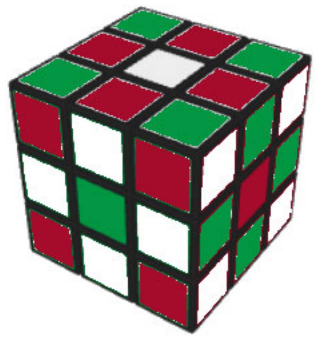
  Hier ist es etwas komplizierter, alle Möglichkeiten auf simultane Konjugation abzuzählen, da die relative Lage von σ und τ relevant wird (oben war immer einer der beiden die Identität oder beide gleich). Wie gehen so vor: Wir wählen für σ wieder einen bestimmten Konjugierten (wieder (143) oder (12)) und dann für τ alle möglichen Konjugierten der infragekommenden Konjugationsklasse $[(143)]$. Wir können allerdings τ immer noch mit allen α konjugieren, deren Konjugation σ festhält.[4]

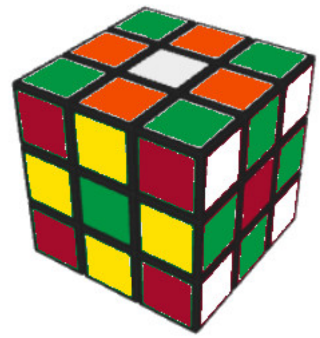
- Sei $\sigma \in [(143)]$ und $\tau \in [(143)]$. Um die Paare bis auf Konjugation $[\sigma, \tau]$ zu bestimmen, nehmen wir $\sigma = (143)$ and und betrachten alle 8 möglichen Repräsentanten $\tau = (ijk)$. Die Konjugation mit $\alpha = (143), (134)$ lässt σ fest, damit sind die folgenden Paare noch konjugiert

$$
\begin{aligned}
&[(143),(143)] && \mapsto [\mathrm{id}] \\
&[(143),(134)] && \mapsto [(134)] \\
&[(143),(123)] = [(143),(421)] = [(143),(324)] && \mapsto [(243)] \\
&[(143),(124)] = [(143),(423)] = [(143),(321)] && \mapsto [(13)(24)]
\end{aligned}
$$

  Rechts davon schreiben wir die Größe $\mapsto \sigma\tau^{-1}$, dh. wie Ecken und Kanten relativ zueinander verdreht sind, diese bilden natürlich auch wieder eine Konjugationsklasse (denn: $\alpha\sigma\alpha^{-1} \cdot (\alpha\tau\alpha^{-1})^{-1} = \alpha(\sigma\tau^{-1})\alpha^{-1}$). Fixpunktfrei auf den Farben sind zwei dieser vier Konjugationsklassen, nämlich $[(134)]$ und $[(243)]$, also bekommen wir die beiden (nicht-konjugierten) Lösungen $[(143), (134)]$ und $[(143), (123)]$

[4] Mathematisch ist dies die Frage, wie das Kreuz-Produkt von Konjugationsklassen $[(\sigma)] \times [(\tau)]$ in Konjugationsklassen zerfällt, was wiederum ein Beispiel eines Tensorprodukts von Darstellungen ist.





Wir beobachten dass im ersten Fall $\sigma, \tau, \sigma\tau^{-1}$ aus ein und derselben zyklischen Gruppe $\mathbb{Z}_3$ sind, nämlich drehen um die mittlere Ecke im Bild, deswegen tauchen im ersten Fall auf den drei sichtbaren Flächen nur die drei Farben dieser Flächen auf, und analog für die drei nicht sichtbaren Flächen analog. Im zweiten Fall treten dagegen aus jedem Blickwinkel mehr Farben auf.

- Sei $\sigma \in [(12)]$ und $\tau \in [(143)]$. Wir verfahren wie im vorherigen Fall: Wählen wir $\sigma = (12)$ und τ alle 8 Repräsentanten, die Konjugation mit $(12), (34), (12)(34)$ lässt σ fest, damit sind die folgenden Paare noch konjugiert:

$$[(12),(143)] = [(12),(243)] = [(12),(134)] = [(12),(234)] \quad \mapsto [(1342)]$$
$$[(12),(123)] = [(12),(213)] = [(12),(124)] = [(12),(214)] \quad \mapsto [(14)]$$

Fixpunktfrei auf den Farben ist nur die zweite Konjugationsklasse $[(14)]$, also bekommen wir die Lösung $[(12),(124)]$: