13. Landeswettbewerb Mathematik Bayern

2010

MATHE MATIK

Einzelheiten zur Teilnahme findest Du auf der Rückseite oder unter **www.lwmb.de**. Du kannst Lösungen zu maximal vier Aufgaben einsenden (10. Klasse nicht A1).
Einsendeschluss ist der **11. 11. 2010**.

Du besuchst eine Realschule oder ein Gymnasium bis einschließlich Klassenstufe 10.
Du fühlst dich von mathematischen Aufgaben herausgefordert und
Du möchtest deine Fähigkeiten testen und erweitern.
Dann ist dieser Wettbewerb des bayrischen Kultusministeriums genau das Richtige für dich.

Aufgabe 1

Sonja hat neun Karten, auf denen die neun kleinsten zweistelligen Primzahlen stehen. Sie will diese Karten so in eine Reihe legen, dass sich die Zahlen auf zwei nebeneinander liegenden Karten immer um eine Potenz der Zahl 2 unterscheiden.
Wie viele Möglichkeiten hat Sonja, ihre Karten anzuordnen?

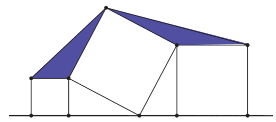
Aufgabe 2

Kleine Holzquader, die alle 10 cm lang, 9 cm breit und 7 cm hoch sind, sollen in eine quaderförmige Kiste mit den Innenmaßen 50 cm, 30 cm und 28 cm gepackt werden.
Bestimme die größtmögliche Anzahl an Holzquadern, die in die Kiste passen, und gib eine Möglichkeit an, wie man sie in die Kiste packen kann.

Aufgabe 3

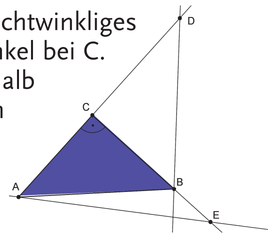
Gegeben sind fünf verschiedene positive ganze Zahlen. Bildet man alle möglichen Summen von jeweils zwei dieser Zahlen, so erhält man genau sieben verschiedene Werte.
Zeige, dass die Summe der fünf Zahlen durch 5 teilbar ist.

Aufgabe 4



Drei Quadrate sind wie in der Abbildung angeordnet. Zeige, dass die Flächeninhalte der beiden markierten Dreiecke gleich groß sind.

Aufgabe 5



Gegeben ist ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck ABC mit dem rechten Winkel bei C.
Die Punkte D und E liegen außerhalb des Dreiecks auf den Halbgeraden [AC bzw. [CB.
Beweise: Die Strecken [CD] und [CE] sind genau dann gleich lang, wenn sich die Geraden AE und BD rechtwinklig schneiden.

Aufgabe 6

Das Produkt dreier positiver ganzer Zahlen ist dreimal so groß wie ihre Summe.
Bestimme alle Möglichkeiten für die drei Zahlen.

Der Landeswettbewerb Mathematik Bayern wird gefördert von

Klar, da mache ich mit! Bitte **lesbar** ausfüllen und mit den Aufgaben einsenden.
Bei Gruppenarbeiten für jedes Mitglied einen Abschnitt beilegen.

Vorname: ____________ **Name:** ____________ **Geschlecht:** ☐ m ☐ w

Jahrgangsstufe: ______ **Name der Schule:** ____________

Schulort: ____________ **Nummern** der bearbeiteten Aufgaben (höchstens vier!)

1	2	3	4	5	6

Gruppenarbeit: ☐ ja ☐ nein

Ich bestätige hiermit, alle Aufgaben **selbständig** bzw. nur in Zusammenarbeit mit den Gruppenmitgliedern gelöst zu haben.

Unterschrift: ____________

Teilnahmebedingungen und Hinweise

- Teilnahmeberechtigt sind alle Schülerinnen und Schüler aus Realschulen und Gymnasien bis Klassenstufe 10 einschließlich.
- Für den Wettbewerb werden die Lösungen von **höchstens** vier der sechs Aufgaben gewertet. Bis einschließlich Klassenstufe 9 können diese vier Aufgaben beliebig ausgewählt werden. Für Teilnehmerinnen und Teilnehmer der Klassenstufe 10 werden nur Lösungen der Aufgaben 2 bis 6 gewertet.
- In der ersten Runde ist **Gruppenarbeit** zugelassen. Eine Gruppe kann aus bis zu drei Mitgliedern bestehen. Besucht mindestens ein Gruppenmitglied die Klassenstufe 10, so werden nur Lösungen zu den Aufgaben 2 bis 6 gewertet.
- Bei jeder Aufgabe sind vier Punkte erreichbar. Jeder Teilnehmer mit mindestens acht Punkten erhält eine **Urkunde**. Darüber hinaus werden erste, zweite und dritte Preise vergeben. Einzelteilnehmer mit Preis erhalten einen **Buchpreis** oder **-gutschein**. Für einen ersten Preis sind mindestens 14 Punkte erforderlich. **Alle Teilnehmer** erhalten eine kleine **Anerkennung** für die Teilnahme.
- Einzelteilnehmer und Gruppenmitglieder, deren Lösungen mit einem ersten oder zweiten Preis bewertet wurden, können sich außerdem durch die Teilnahme an der zweiten Runde für ein mehrtägiges mathematisches Seminar qualifizieren. In der zweiten Runde ist keine Gruppenarbeit mehr zugelassen.
- Zu diesen Seminaren, die in den vergangenen Jahren bei den Teilnehmern ein sehr positives Echo gefunden haben, werden 60 Jugendliche eingeladen.
- Für die Lösung jeder Aufgabe sind gesonderte **DIN A4-Blätter** zu verwenden, die jeweils mit dem Namen zu versehen sind und nur einseitig beschrieben und **nicht gefaltet** sein sollen. Bitte alle Blätter in Reihenfolge der Aufgaben oben links zusammenheften.
- An jede Einsendung muss oben links der Rückmeldezettel des Aufgabenblattes angeheftet werden. Er muss mit der unterschriebenen Erklärung versehen sein, dass alle Aufgaben selbständig bzw. nur in Zusammenarbeit mit den Gruppenmitgliedern gelöst wurden. Die verwendete Literatur ist anzugeben.
- Zu einer vollständig richtigen Lösung gehört insbesondere, dass alle wesentlichen Zwischenschritte aufgeführt und begründet sind. Die Angabe eines Zahlenwertes alleine oder von Beispielen genügt nicht als Lösung. Werden innerhalb eines Lösungswegs Eigenschaften verwendet, die aus dem Unterricht bekannt sind, so ist deren Nachweis nicht erforderlich. Auf die verwendete Eigenschaft muss jedoch bei der Lösung hingewiesen werden.
- Unübersichtliche oder unleserliche Lösungen können von der Korrektur ausgeschlossen werden.
- Die Korrekturentscheidung ist endgültig und unterliegt nicht dem Rechtsweg.
- Nach Abschluss der Korrektur (Ende Dezember) erhält der Kontaktlehrer bzw. Fachbetreuer Mathematik jeder teilnehmenden Schule Nachricht über die Ergebnisse der Teilnehmer der Schule.
- Die Aufgaben der zweiten Runde werden bereits im Dezember über die Kontaktlehrer an die teilnahmeberechtigten Schüler versandt.
- Eine Rücksendung der korrigierten Arbeiten ist aus organisatorischen Gründen nicht möglich. Es empfiehlt sich deshalb, **eine Kopie anzufertigen**, um die eigenen Lösungen mit den Anmerkungen zur Korrektur und den Lösungsbeispielen vergleichen zu können.
- Die ausreichend frankierten Zuschriften (Umschlag für DIN A4 mit Porto 1,45 €) sind zu richten an:

  Albrecht Kliem
  Landeswettbewerb Mathematik
  Wirsberg-Gymnasium
  Am Pleidenturm 16
  97070 Würzburg
- Einsendeschluss ist der **11. 11. 2010** (Datum des Poststempels).
- Übungsmaterial: Aufgaben und Lösungen vergangener Wettbewerbsjahre können unter www.lwmb.de abgerufen werden.

Lösungsbeispiele aus dem vergangenen Jahr

Aufgabe 1

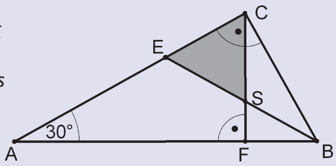
Wird zu einer natürlichen Zahl ihre Quersumme addiert, so erhält man 2010. Bestimme alle Zahlen, bei denen dies zutrifft.

Lösung:
Die Zahlen **1986** und **2004** sind die einzigen natürlichen Zahlen, die addiert zu ihrer Quersumme 2010 ergeben.

Beweis:
Mit QS(n) bezeichnen wir die Quersumme einer natürlichen Zahl n. Die gesuchten Zahlen n müssen alle kleiner als 2010 sein, da n + QS(n) = 2010 mit QS(n) > 0 gefordert ist. Die größtmögliche Quersumme einer Zahl, die kleiner als 2010 ist, ist 28, denn die Zahlen unterhalb von 2000 haben die größte Quersumme, wenn alle Ziffern der Zahl möglichst groß sind. Dies ist für 1999 der Fall, wobei QS(1999) = 1+9+9+9 = 28. Die Zahlen zwischen 2000 und 2010 haben offensichtlich alle eine kleinere Quersumme als 28. Somit dürfen die gesuchten Zahlen alle höchstens um 28 unterhalb von 2010 liegen.
Es kommen also nur die Zahlen von 1982 bis 2010 in Frage. Man kann nun diese 28 Zahlen einfach der Reihe nach durchprobieren und die oben genannten Lösungen finden. Durch einfache Überlegungen kann man auch das Probieren verkürzen. So kann in jedem der drei Zehnerbereiche 1980 bis 1989, 1990 bis 1999 und 2000 bis 2009 höchstens eine Lösung vorhanden sein: Erhöht man innerhalb eines solchen Zehnerbereichs nämlich die Zahl um 1, so erhöht sich auch die zugehörige Quersumme um 1, da es ja keinen Zehnerübergang gibt. Somit erhöht sich die Summe aus der Zahl und ihrer Quersumme um 2. Nur für höchstens eine Zahl aus einem Zehnerbereich kann sich also genau 2010 ergeben. Für n = 1982 ist 1982 + QS(1982) = 1982 + 20 = 2002. Die Differenz zu 2010 ist also 8.
Da die Summe bei jeder Erhöhung der Zahl um 1 um 2 größer wird, muss man die Zahl 1982 um 4 vergrößern, um die richtige Summe 2010 zu erhalten. So findet man die erste Zahl 1986. Für n = 1990 ist 1990 + QS(1990) = 1990 + 19 = 2009. Für 1991 ergibt sich bereits 2011 als Summe. In dem Zehnerbereich 1990 bis 1999 kann es also keine Zahlen mit der gesuchten Eigenschaft geben. Für n = 2000 ist 2000+QS(2000) = 2000 + 2 = 2002. Die Differenz zu 2010 ist also 8. Da die Summe bei jeder Erhöhung der Zahl um 1 um 2 größer wird, muss man die Zahl 2000 um 4 vergrößern um die richtige Summe 2010 zu erhalten. So findet man die zweite mögliche Zahl 2004.

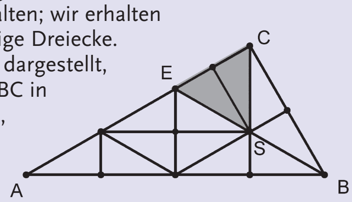
Aufgabe 3

Das Dreieck ABE ist gleichschenklig mit der Basis [AB]. Bestimme den Anteil der Fläche des Dreiecks ESC an der Fläche des Dreiecks ABC.



Lösung:
Der Anteil der Fläche des Dreiecks ESC an der Fläche des Dreiecks ABC beträgt ein Sechstel.

Beweis:
Dreiecke, die wie das Ausgangsdreieck ABC die Innenwinkel 90°, 60°, 30° haben, nennen wir „halbe gleichseitige Dreiecke“.
Indem wir Parallelen und Orthogonalen zu den Seiten einzeichnen, bleiben diese Winkelgrößen erhalten; wir erhalten also lauter neue halbe gleichseitige Dreiecke.
Wie in der folgenden Zeichnung dargestellt, können wir damit das Dreieck ABC in zwölf kleine Dreiecke unterteilen, die alle halbe gleichseitige Dreiecke sind.



Da je zwei benachbarte Dreiecke dieser zusammenhängenden Figur eine Seite gemeinsam haben, sind alle Dreiecke kongruent.
Das markierte Dreieck ESC besteht nun aus zwei dieser 12 Dreiecke. Der Flächenanteil ist also ein Sechstel.